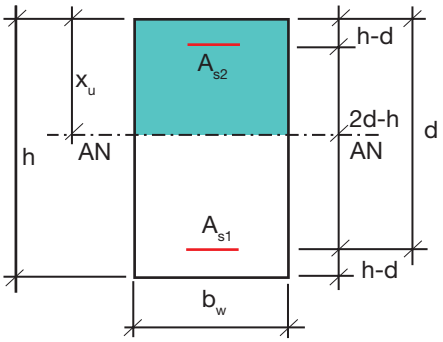
A4 Calcul manuel d'une section rectangulaire avec armatures symétriques à l'ELU par approximations successives

La solution la plus rapide pour résoudre le problème est obtenue en utilisant les diagrammes d'interaction (voir § 5, chapitre 11 : « Flexion composée », p. 443, avec lecture sur l'axe $O\mu_G$ pour la flexion simple). Dans le cas où l'on ne dispose pas de tels diagrammes, on peut utiliser la méthode par approximations successives exposée ci-après.

1. Hypothèses – Notations

Considérons la section rectangulaire symétrique définie ci-dessous :



$A_{s1} = A_{s2} = A$

On se place dans le cas où $0 \leq x_u \leq d$ (section avec au moins une nappe d'aciers tendus).

Annexe en ligne.fm Page 628 Mercredi, 11. mars 2009 10:05 10

Cette section est sollicitée en flexion composée sous les sollicitations M_{EdA} et N_{Ed} ; le cas de la flexion simple – $N_{Ed} = 0$ – est traité au § 5 ci-après.

2. Moment de référence

2.1 Si $x_u < h - d$

Les aciers supérieurs sont tendus.

2.1.1 Remarques

Dans le cas général, on a, pour une poutre, $d \approx 0,9h$ et pour des bétons de classe au moins égale à C50/60, si l'on veut se placer au pivot A :

- dans le cas du diagramme σ–ε à palier incliné, il faut que :

$$h - d < \alpha_{AB}.d \Leftrightarrow h < \left(1 + \alpha_{AB}\right)d$$

$$d > \frac{1}{1+\alpha_{AB}}h = \begin{cases} \dfrac{1}{1+0,1346}h = 0,88.h : \text{S 500 A} \\ \dfrac{1}{1+0,0722}h = 0,93.h : \text{S 500 B} \\ \dfrac{1}{1+0,0493}h = 0,95.h : \text{S 500 C} \end{cases}$$

- dans le cas du diagramme σ–ε à palier horizontal, il faut que :

$\alpha_{AB} = 0 \quad \Rightarrow \quad d > h$, ce qui est impossible.

Par conséquent, dans le cas des poutres ($d \approx 0,9h$), on ne peut se trouver au pivot A que pour des bétons de classe au moins égale à C50/60 avec des aciers S 500 A.

2.1.2 Cas du pivot A

Les aciers avec diagramme σ–ε à palier horizontal ne permettent pas au diagramme des déformations de passer par le pivot A.

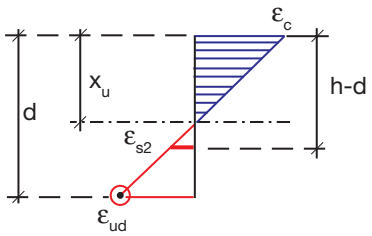
2.1.2.1 Aciers supérieurs

Au pivot A, l'allongement des aciers inférieurs est invariable et vaut ε_{ud}.

Annexe en ligne.fm Page 629 Mercredi, 11. mars 2009 10:05 10

Allongement des aciers supérieurs :

$$\varepsilon_{s2} = \varepsilon_{ud}\,\frac{h - d - x_u}{d - x_u}$$



Contrainte des aciers supérieurs supposée prise sur la droite de Hooke :

$$\sigma_{s2} = E_s.\varepsilon_{s2} = 2\,.10^5.\varepsilon_{ud}\,\frac{h - d - x_u}{d - x_u}. \qquad [1]$$

Cette contrainte est maximale pour $x_u = 0$ et vaut alors :

$$\sigma_{s2,\ max} = 2\,.10^5.\varepsilon_{ud}\left(\frac{h}{d} - 1\right).$$

Pour les aciers S 500, $\sigma_{s2,\ max}$ reste sur la droite de Hooke tant que :

$$\sigma_{s2,\ max} \le f_{yd} \quad \Leftrightarrow \quad 2\,.10^5.\varepsilon_{ud}\left(\frac{h}{d} - 1\right) \le f_{yd} = 435 \text{ MPa},$$

nous en déduisons :

$$\sigma_{s2,\ max} \le f_{yd} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{h}{d} \le \frac{435}{2\,.10^5.\varepsilon_{ud}} + 1$$

$$\Rightarrow \quad \frac{h}{d} \le \begin{cases} \dfrac{435}{2\,.10^5.22{,}5.10^{-3}} + 1 = 1{,}097 : \text{classe A} \\ \dfrac{435}{2\,.10^5.45.10^{-3}} + 1 = 1{,}048 : \text{classe B} \\ \dfrac{435}{2\,.10^5.67{,}5.10^{-3}} + 1 = 1{,}032 : \text{classe C} \end{cases}$$

$$\rightarrow \quad d \ge \begin{cases} 0{,}91.h : \text{classe A} \\ 0{,}95.h : \text{classe B} \\ 0{,}97.h : \text{classe C} \end{cases}$$

Comme pour une poutre $d \approx 0{,}9h$, nous ne sommes pas assurés que la contrainte des aciers supérieurs soit toujours située sur la droite de Hooke.

Annexe en ligne.fm Page 630 Mercredi, 11. mars 2009 10:05 10

2.1.2.2 Aciers inférieurs

Au pivot A, l'allongement des aciers inférieurs étant invariable et égal à ε_{ud}, la contrainte correspondante vaut (voir § 2.4.2.1, chapitre 3 : « Béton armé – Généralités », p. 53) :

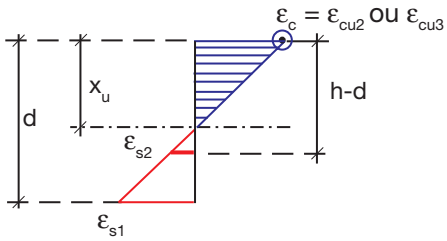
$$\sigma_{s1} = \begin{cases} 454 \text{ MPa : S 500 A,} \\ 466 \text{ MPa : S 500 B,} \\ 493 \text{ MPa : S 500 C.} \end{cases}$$

2.1.3 Cas du pivot B

2.1.3.1 Aciers supérieurs

Allongement des aciers supérieurs :

$$\varepsilon_{s2} = \varepsilon_{cu2} \frac{h - d - x_u}{x_u}$$



Contrainte des aciers supérieurs supposée prise sur la droite de Hooke :

$$\sigma_{s2} = E_s.\varepsilon_{s2} = 2.10^5.\varepsilon_{cu2} \frac{h - d - x_u}{x_u}. \qquad [1']$$

2.1.3.2 Aciers inférieurs

Allongement des aciers inférieurs :

$$\varepsilon_{s1} = \varepsilon_{cu2} \frac{d - x_u}{x_u}$$

Contrainte des aciers inférieurs supposée prise sur la droite de Hooke :

$$\sigma_{s1} = E_s.\varepsilon_{s1} = 2.10^5.\varepsilon_{cu2} \frac{d - x_u}{x_u}.$$

Pour les aciers S 500 et des bétons de classe au plus égale à C50/60, σ_{s1} reste sur la droite de Hooke tant que :

$$\sigma_{s1} \le f_{yd} \quad \Leftrightarrow \quad \overbrace{2.10^5.3{,}5.10^{-3}}^{700} \frac{d - x_u}{x_u} \le f_{yd}.$$

Annexe en ligne.fm Page 631 Mercredi, 11. mars 2009 10:05 10

Nous en déduisons :

$$x_u \geq \frac{700.d}{700 + f_{yd}} = \frac{700.d}{700 + 435} = 0,62.d$$

Comme nous avons supposé que $x_u \leq h - d$, pour les poutres $d \approx 0,9h$ donne $x_u \leq 0,1.d$. Il en résulte que la contrainte des aciers inférieurs se trouve toujours sur le palier (horizontal ou incliné) du diagramme contraintes-déformations de l'acier.

2.2 Si $x_u = h - d$

L'axe neutre passant par le centre de gravité des aciers supérieurs :

$$\varepsilon_{s2} = 0 \quad \Rightarrow \quad \sigma_{s2} = 0.$$

D'où le moment que peut équilibrer la section, rapporté aux aciers inférieurs dans le cas où $x_u = h - d$:

$$M_{RS} = \lambda.b_w\,(h - d)f_{cu}\left[d - \frac{\lambda}{2}(h - d)\right],$$

$$M_{RS} = \lambda.b_w.d^2.f_{cu}\left(\frac{h}{d} - 1\right).\left(1 + \frac{\lambda}{2} - \frac{\lambda}{2}.\frac{h}{d}\right),$$

$$M_{RS} = \left(\frac{h}{d} - 1\right).\left[\left(\lambda + \frac{\lambda^2}{2}\right) - \frac{\lambda^2}{2}.\frac{h}{d}\right] b_w.d^2.f_{cu}\,.$$

Nous remarquerons que pour les bétons de classe au moins égale à C50/60, nous avons $\lambda = 0,8$ et :

$$\left.\begin{array}{l} \lambda + \dfrac{\lambda^2}{2} = 0,8 + \dfrac{0,8^2}{2} = 1,12 \\ \dfrac{\lambda^2}{2} = \dfrac{0,8^2}{2} = 0,32 \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad M_{RS} = \left(\frac{h}{d} - 1\right).\left(1,12 - 0,32\frac{h}{d}\right) b_w.d^2.f_{cu}$$

2.3 Si $x_u > h - d$

Voir § 3.2 ci-après.

Annexe en ligne.fm Page 632 Mercredi, 11. mars 2009 10:05 10

3. Mise en équation du problème

3.1 Cas où $M_{EdA} \leq M_{RS}$ ($\Leftrightarrow$ x_u h – d)

Les aciers supérieurs sont tendus et les équations d'équilibre donnent :

$$\begin{cases} N_{Ed} = \lambda.b_w.x_u.f_{cu} - A\left(\sigma_{s2} + \sigma_{s1}\right), \\ M_{EdA} = \lambda.b_w.x_u.f_{cu}\left(d - \dfrac{\lambda}{2}x_u\right) - A.\sigma_{s2}\left(2d - h\right), \end{cases}$$

avec :

- au pivot A si $x_u \leq \dfrac{\varepsilon_{cu2}}{\varepsilon_{cu2} + \varepsilon_{ud}} d$:

$$\varepsilon_{s2} = \varepsilon_{ud}\frac{h - d - x_u}{d - x_u},$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \text{si } \varepsilon_{s2} < \varepsilon_{yd} = \dfrac{f_{yd}}{E_s} : \sigma_{s2} = E_s.\varepsilon_{s2} = 2.10^5.\varepsilon_{s2} \\ \text{si } \varepsilon_{s2} \geq \varepsilon_{yd} = \dfrac{f_{yd}}{E_s} : \sigma_{s2} = \begin{cases} A + B.\varepsilon_{s2} : \text{diagramme } \sigma - \varepsilon \text{ à palier incliné,} \\ f_{yd} : \text{diagramme } \sigma - \varepsilon \text{ à palier horizontal.} \end{cases} \end{cases}$$

les coefficients A et B sont ceux figurant au § 2.4.2.1, chapitre 3 : « Béton armé – Généralités », p. 53, suivant la classe d'aciers considérés (pour les aciers avec diagramme σ–ε à palier horizontal, on ne peut se trouver au pivot A),

$$\varepsilon_{s1} = \varepsilon_{ud},$$

$$\Rightarrow \quad \sigma_{s1} = \begin{cases} 454 \text{ MPa : S 500 A,} \\ 466 \text{ MPa : S 500 B,} \\ 493 \text{ MPa : S 500 C.} \end{cases}$$

- au pivot B si $x_u > \dfrac{\varepsilon_{cu2}}{\varepsilon_{cu2} + \varepsilon_{ud}} d$:

$$\varepsilon_{s2} = \varepsilon_{cu2}\frac{h - d - x_u}{x_u},$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \text{si } \varepsilon_{s2} < \varepsilon_{yd} = \dfrac{f_{yd}}{E_s} : \sigma_{s2} = E_s.\varepsilon_{s2} = 2.10^5.\varepsilon_{s2} \\ \text{si } \varepsilon_{s2} \geq \varepsilon_{yd} = \dfrac{f_{yd}}{E_s} : \sigma_{s2} = \begin{cases} A + B.\varepsilon_{s2} : \text{diagramme } \sigma - \varepsilon \text{ à palier incliné,} \\ f_{yd} : \text{diagramme } \sigma - \varepsilon \text{ à palier horizontal.} \end{cases} \end{cases}$$

Annexe en ligne.fm Page 633 Mercredi, 11. mars 2009 10:05 10

$$\varepsilon_{s1} = \varepsilon_{cu2}\frac{d - x_u}{x_u},$$

$$\Rightarrow \quad \sigma_{s1} = \begin{cases} A + B.\varepsilon_{s1} : \text{diagramme } \sigma - \varepsilon \text{ à palier incliné,} \\ f_{yd} : \text{diagramme } \sigma - \varepsilon \text{ à palier horizontal,} \end{cases}$$

A_{s1} et x_u sont inconnus a priori.

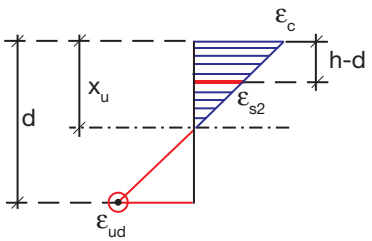
3.2 Cas où $M_{EdA} > M_{RS}$ ($\Leftrightarrow$ $x_u > h - d$)

Les aciers supérieurs sont comprimés.

3.2.1 Cas où $h - d < x_u \leq \frac{\varepsilon_{cu2}}{\varepsilon_{cu2} + \varepsilon_{ud}} d$ et où le diagramme σ–ε des aciers est à palier incliné

On est au pivot A et le raccourcissement des aciers supérieurs vaut :

$$\varepsilon_{s2} = \varepsilon_{ud}.\frac{x_u - (h - d)}{d - x_u}$$



D'où leur contrainte supposée prise sur la droite de Hooke :

$$\sigma_{s2} = E_s.\varepsilon_{s2} = 2.10^5.\varepsilon_{ud}\frac{x_u - h + d}{d - x_u} \qquad [4]$$

Cette contrainte ne peut atteindre f_{yd} que si :

$$\sigma_{s2} \geq f_{yd} \quad \Leftrightarrow \quad 2.10^5.\varepsilon_{ud}\frac{x_u - h + d}{d - x_u} \geq f_{yd},$$

$$x_u \geq \frac{d.f_{yd} + 2.10^5.\varepsilon_{ud}(h - d)}{2.10^5.\varepsilon_{ud} + f_{yd}}$$

Ou, comme on a supposé $x_u \leq \frac{\varepsilon_{cu2}}{\varepsilon_{cu2} + \varepsilon_{ud}} d$, si :

Annexe en ligne.fm Page 634 Mercredi, 11. mars 2009 10:05 10

$$\frac{2.10^5.\varepsilon_{ud}.h - d\left(2.10^5.\varepsilon_{ud} - f_{yd}\right)}{2.10^5.\varepsilon_{ud} + f_{yd}} \leq \frac{\varepsilon_{cu2}}{\varepsilon_{cu2} + \varepsilon_{ud}} d.$$

Cette circonstance ne peut se rencontrer que si :

$$2.10^5.\varepsilon_{ud}.h - 2.10^5.\varepsilon_{ud}.d + d.f_{yd} \leq 2.10^5.\varepsilon_{ud} \frac{\varepsilon_{cu2}}{\varepsilon_{cu2} + \varepsilon_{ud}} d + \frac{\varepsilon_{cu2}}{\varepsilon_{cu2} + \varepsilon_{ud}} d.f_{yd}$$

$$f_{yd} \leq \frac{-2.10^5.\varepsilon_{ud}.h + 2.10^5.\varepsilon_{ud}\left(1 + \frac{\varepsilon_{cu2}}{\varepsilon_{cu2} + \varepsilon_{ud}}\right) d}{\left(1 - \frac{\varepsilon_{cu2}}{\varepsilon_{cu2} + \varepsilon_{ud}}\right) d}$$

$$f_{yd} \leq 2.10^5.\varepsilon_{ud} \frac{-h + \left(1 + \frac{\varepsilon_{cu2}}{\varepsilon_{cu2} + \varepsilon_{ud}}\right) d}{\left(1 - \frac{\varepsilon_{cu2}}{\varepsilon_{cu2} + \varepsilon_{ud}}\right) d},$$

Ce qui conduit, dans le cas général où $h \approx 1{,}1.d$ et où $\varepsilon_{cu2} = 3{,}5\ ‰$ $\left(f_{ck} \leq 50\ \text{MPa}\right)$ à :

$$f_{yd} \leq 2.10^5.\varepsilon_{ud} \frac{-1{,}1 + \left(1 + \frac{\varepsilon_{cu2}}{\varepsilon_{cu2} + \varepsilon_{ud}}\right)}{1 - \frac{\varepsilon_{cu2}}{\varepsilon_{cu2} + \varepsilon_{ud}}}$$

$$f_{yd} \leq \begin{cases} 180\ \text{MPa} : \text{S 500 A}\left(\varepsilon_{ud} = 22{,}5\ ‰\right) \\ -270\ \text{MPa} : \text{S 500 B}\left(\varepsilon_{ud} = 45\ ‰\right) \\ -720\ \text{MPa} : \text{S 500 C}\left(\varepsilon_{ud} = 67{,}5\ ‰\right) \end{cases}.$$

Conclusion

Dans le cas envisagé ($h - d < x_u \leq \frac{\varepsilon_{cu2}}{\varepsilon_{cu2} + \varepsilon_{ud}} d$), si l'on emploie des aciers S 500, $f_{yd} = 435\ \text{MPa} > 180\ \text{MPa}$ et la contrainte des aciers supérieurs ne peut atteindre f_{yd}.

Les équations d'équilibre s'écrivent donc :

$$\begin{cases} N_{Ed} = \lambda.b_w.x_u.f_{cu} + A.\sigma_{s2} - A.\sigma_{s1} \\ \qquad = \lambda.b_w.x_u.f_{cu} - A.\left(\sigma_{s1} - \sigma_{s2}\right), & [5] \\ M_{EdA} = \lambda.b_w.x_u.f_{cu}\left(d - \frac{\lambda}{2}x_u\right) + A.\sigma_{s2}\left(2d - h\right), & [6] \end{cases}$$

Annexe en ligne.fm Page 635 Mercredi, 11. mars 2009 10:05 10

avec :

$$\sigma_{s2} = E_s.\varepsilon_{s2} = 2.10^5.\varepsilon_{ud}\frac{x_u - h + d}{d - x_u} \text{ et } \sigma_{s1} = \begin{cases} 454 \text{ MPa : S 500 A,} \\ 466 \text{ MPa : S 500 B,} \\ 493 \text{ MPa : S 500 C.} \end{cases}$$

A_{s1} et x_u sont inconnus a priori.

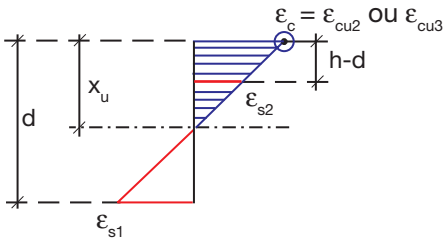
3.2.2 Autres cas

Il s'agit des cas suivants :

- $x_u > \dfrac{\varepsilon_{cu2}}{\varepsilon_{cu2} + \varepsilon_{ud}} d$ pour les aciers avec diagramme σ–ε à palier incliné ;
- aciers avec diagramme σ–ε à palier horizontal, quelle que soit la valeur de x_u.

On est au pivot B et le raccourcissement des aciers supérieurs vaut :

$$\varepsilon_{s2} = \varepsilon_{cu2}\frac{x_u - (h - d)}{x_u}$$



D'où leur contrainte supposée prise sur la droite de Hooke :

$$\sigma_{s2} = E_s.\varepsilon_{s2} = 2.10^5.\varepsilon_{cu2}\frac{x_u - (h - d)}{x_u}. \qquad [7]$$

Cette valeur n'atteint f_{yd} que si :

$$\sigma_{s2} \geq f_{yd} \quad \Leftrightarrow \quad 2.10^5.\varepsilon_{cu2}\frac{x_u - (h - d)}{x_u} \geq f_{yd},$$

$$x_u \geq \frac{2.10^5.\varepsilon_{cu2}(h - d)}{2.10^5.\varepsilon_{cu2} - f_{yd}} = x_e .$$

Ce qui conduit pour les aciers S 500 et h ≈ 1,1.d à :

$$x_e = \frac{2.10^5.\varepsilon_{cu2}}{2.10^5.\varepsilon_{cu2} - f_{yd}}(h - d) \qquad [8]$$

Annexe en ligne.fm Page 636 Mercredi, 11. mars 2009 10:05 10

Remarque

Pour des bétons de classe de résistance au plus égale à C50/60 : ε_{cu2} = 3,5 ‰ et pour des aciers S 500 :

$$x_e = \frac{2.10^5.3,5.10^{-3}}{2.10^5.3,5.10^{-3} - 435}(h - d) = 2,64\,(h - d) \qquad [8']$$

Conclusion

En posant : $x_e = \dfrac{2.10^5.\varepsilon_{cu2}}{2.10^5.\varepsilon_{cu2} - f_{yd}}(h - d)$:

1/ si $h - d < x_u \leq x_e$, les équations d'équilibre s'écrivent :

$$\begin{cases} N_{Ed} = \lambda.b_w.x_u.f_{cu} + A.(\sigma_{s2} - \sigma_{s1}) \\ \qquad = \lambda.b_w.x_u.f_{cu} - A.(\sigma_{s1} - \sigma_{s2}), & [9] \\ M_{EdA} = \lambda.b_w.x_u.f_{cu}\left(d - \dfrac{\lambda}{2}x_u\right) + A.\sigma_{s2}(2d - h), & [10] \end{cases}$$

avec :

$$\sigma_{s2} = 2.10^5.\varepsilon_{cu2}\frac{x_u - (h - d)}{x_u},$$

$$\varepsilon_{s1} = \varepsilon_{cu2}\frac{d - x_u}{x_u},$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \text{si } \varepsilon_{s1} < \varepsilon_{yd} = \dfrac{f_{yd}}{E_s} : \sigma_{s1} = E_s.\varepsilon_{s1} = 2.10^5.\varepsilon_{s1} \\ \text{si } \varepsilon_{s1} \geq \varepsilon_{yd} = \dfrac{f_{yd}}{E_s} : \sigma_{s1} = \begin{cases} A + B.\varepsilon_{s1} : \text{diagramme } \sigma - \varepsilon \text{ à palier incliné,} \\ f_{yd} : \text{diagramme } \sigma - \varepsilon \text{ à palier horizontal,} \end{cases} \end{cases}$$

A_{s1} et x_u sont inconnus a priori.

2/ si $x_u > x_e$, $\sigma_{s2} \geq f_{ed}$ et les équations d'équilibre deviennent :

$$\begin{cases} N_{Ed} = \lambda.b_w.x_u.f_{cu} + A.(\sigma_{s2} - \sigma_{s1}) \\ \qquad = \lambda.b_w.x_u.f_{cu} - A.(\sigma_{s1} - \sigma_{s2}), & [9] \\ M_{EdA} = \lambda.b_w.x_u.f_{cu}\left(d - \dfrac{\lambda}{2}x_u\right) + A.\sigma_{s2}(2d - h), & [10] \end{cases}$$

Annexe en ligne.fm Page 637 Mercredi, 11. mars 2009 10:05 10

avec :

$$\varepsilon_{s2} = \varepsilon_{cu2}\frac{x_u - (h - d)}{x_u},$$

$$\Rightarrow \quad \sigma_{s2} = \begin{cases} A + B.\varepsilon_{s2} : \text{diagramme } \sigma - \varepsilon \text{ à palier incliné,} \\ f_{yd} : \text{diagramme } \sigma - \varepsilon \text{ à palier horizontal.} \end{cases}$$

$$\varepsilon_{s1} = \varepsilon_{cu2}\frac{d - x_u}{x_u},$$

$$\Rightarrow \quad \begin{cases} \text{si } \varepsilon_{s1} < \varepsilon_{yd} = \dfrac{f_{yd}}{E_s} : \sigma_{s1} = E_s.\varepsilon_{s1} = 2.10^5.\varepsilon_{s1} \\ \text{si } \varepsilon_{s1} \geq \varepsilon_{yd} = \dfrac{f_{yd}}{E_s} : \sigma_{s1} = \begin{cases} A + B.\varepsilon_{s1} : \text{diagramme } \sigma - \varepsilon \text{ à palier incliné,} \\ f_{yd} : \text{diagramme } \sigma - \varepsilon \text{ à palier horizontal,} \end{cases} \end{cases}$$

4. Méthode par approximations successives

On opère de la façon suivante :

1/ déterminer dans quel cas on se trouve en comparant M_{EdA} à M_{RS} (aciers supérieurs comprimés ou tendus, voir § 3.2) ;

2/ en se donnant x_u, calculer les contraintes σ_{s2} et σ_{s1} correspondantes ;

3/ en déduire A_{s1} par l'équation d'équilibre des moments ;

4/ évaluer N_{Ed} à partir de x_u et A_{s1} trouvé à l'étape 3 ;

5/ comparer la valeur de N_{Ed} trouvée à l'étape 4 à celle de $N_{Ed,\ réel}$ et reprendre le calcul depuis l'étape 2 en modifiant la valeur de x_u jusqu'à ce que $N_{Ed,\ calculé} \approx N_{Ed,\ réel}$.

5. Cas de la flexion simple

La seule chose qui change est que $N_{Ed} = 0$ dans les équations d'équilibre.

Pour les aciers avec diagramme σ–ε à palier horizontal, le cas où $x_u > x_e$ ne peut se rencontrer. Dans un tel cas, l'équilibre devrait être assuré par les aciers seuls (voir $\sigma_{s1} = \sigma_{s2} = f_{yd}$ avec $N_{Ed} = 0 \Rightarrow x_u = 0$ par l'équation [9]) sans intervention du béton comprimé entourant les armatures supérieures comprimées, ce qui n'est pas possible.

Annexe en ligne.fm Page 638 Mercredi, 11. mars 2009 10:05 10

6. Conclusion

Compte tenu des développements ci-dessus, on voit que, même en flexion simple, la solution la plus rapide est fournie par les diagrammes d'interaction (voir § 5.8, chapitre 11 : « Flexion composée », p. 443, lecture sur l'axe $O\mu_G$ pour la flexion simple).

Les développements précédents ayant été conduits uniquement à l'ELU, il reste à vérifier, à l'ELS, les contraintes du béton comprimé et des aciers tendus lorsque celles-ci sont limitées.

7. Organigramme

Données :

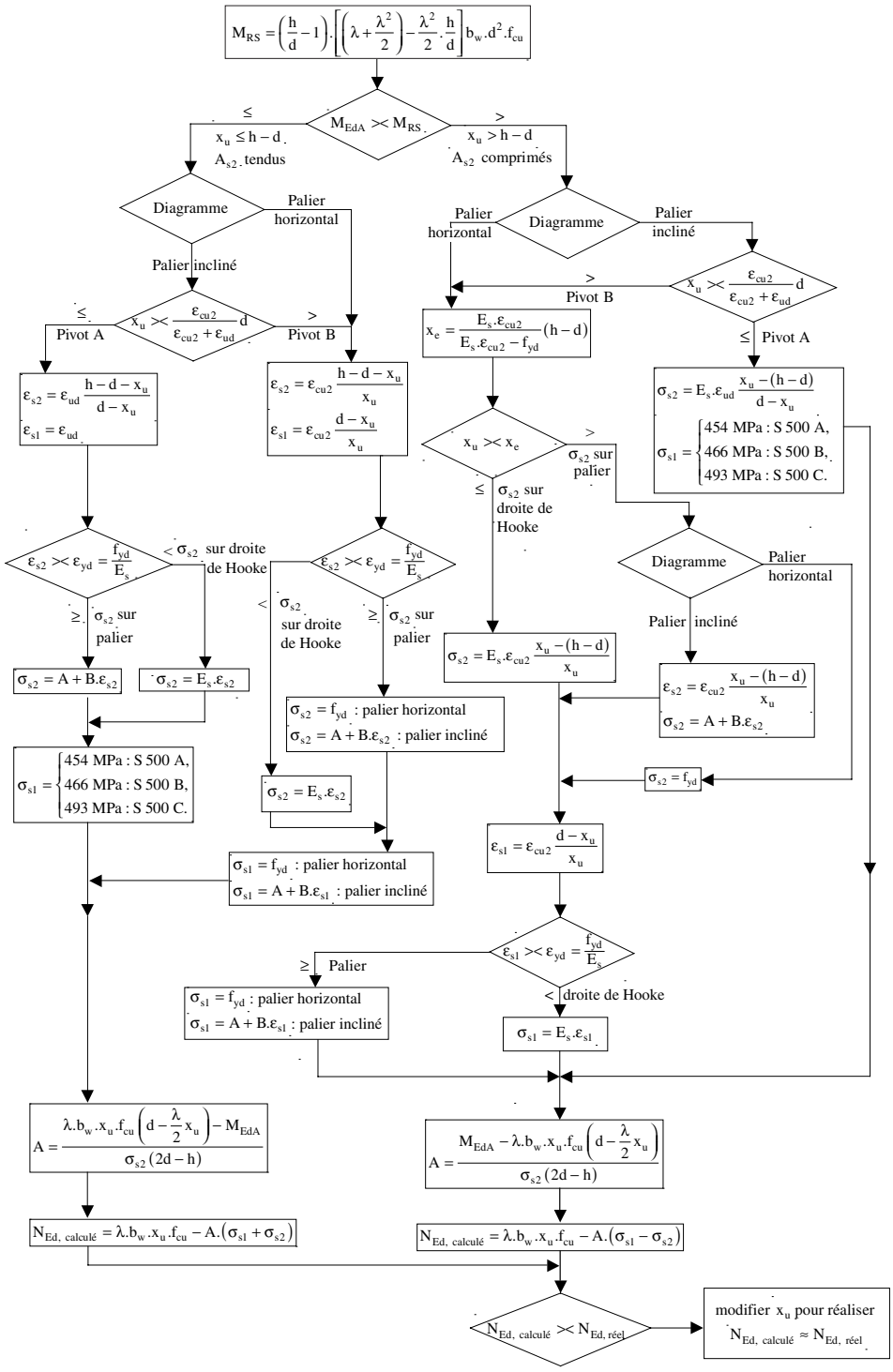
- géométie de la section : b_w, h, d ;
- sollicitations : M_{EdA} et $N_{Ed,\ réel}$;
- matériaux :
  - béton : f_{cu}, ε_{cu2} ;
  - aciers : f_{yd}, ε_{ud}, forme du diagramme σ–ε, E_s ;
- position arbitraire de l'axe neutre : x_u.

Résultats : section d'aciers $A = A_{s1} = A_{s2}$

Remarque

Dans l'organigramme ci-dessous, les coefficients A et B intervenant dans les expressions de σ_{s1} et σ_{s2} sont ceux figurant au § 2.4.2.1, chapitre 3 : « Béton armé – Généralités », p. 53, suivant la classe d'aciers considérés.

Annexe en ligne.fm Page 639 Mercredi, 11. mars 2009 10:05 10



Annexe en ligne.fm Page 640 Mercredi, 11. mars 2009 10:05 10

8. Applications numériques

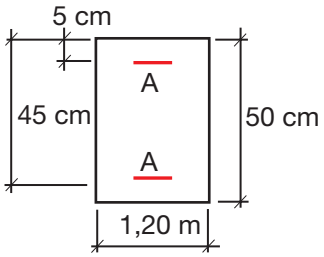
8.1 Pose du problème n° 1 – Cas où $M_{EdA} \leq M_{RS}$

On considère la section rectangulaire symétrique définie ci-contre.

Matériaux :

- béton : f_{cu} = 16,7 MPa, ε_{cu2} = 0,0035 ;
- aciers : f_{yd} = 435 MPa, $E_s = 2.10^5$ MPa.

Sollicitations : M_{EdA} = 0,160 mMN, N_{Ed} = 0,12633 MN.



Nous nous proposons de déterminer les armatures dans les cas suivants :

- aciers avec diagramme σ–ε à palier horizontal ($\varepsilon_{ud} = \infty$) ;
- aciers avec diagramme σ–ε à palier incliné (ε_{ud} = 45 ‰, B = 727,27 et A = 433,20 pour aciers S 500 B).

8.2 Solution

8.2.1 Cas du diagramme σ–ε à palier horizontal

Moment de référence :

$$M_{RS} = \left(\frac{h}{d} - 1\right).\left[\left(\lambda + \frac{\lambda^2}{2}\right) - \frac{\lambda^2}{2}.\frac{h}{d}\right] b_w.d^2.f_{cu}$$

$$M_{RS} = \left(\frac{0,50}{0,45} - 1\right).\left[\left(0,8 + \frac{0,8^2}{2}\right) - \frac{0,8^2}{2}.\frac{0,50}{0,45}\right] 1,20.0,45^2.16,7$$

$$M_{RS} = 0,345 \text{ mMN}$$

Position de l'axe neutre :

$M_{EdA} >< M_{RS}$ $\qquad$ M_{EdA} = 0,160 mMN < 0,345 mMN = M_{RS}

$x_u < h - d$ et les aciers supérieurs sont tendus.

Comme h – d = 0,05 m, prenons $x_u = 0,03$ m.

Première itération :

diagramme σ–ε à palier horizontal ⇒ Pivot B

Annexe en ligne.fm Page 641 Mercredi, 11. mars 2009 10:05 10

$$\varepsilon_{s2} = \varepsilon_{cu2}\frac{h - d - x_u}{x_u} \qquad \varepsilon_{s2} = 0,0035\frac{0,50 - 0,45 - 0,03}{0,03} = 0,00233$$

$$\varepsilon_{s1} = \varepsilon_{cu2}\frac{d - x_u}{x_u} \qquad \varepsilon_{s1} = 0,0035\frac{0,45 - 0,03}{0,03} = 0,049$$

$$\varepsilon_{s2} >< \varepsilon_{yd} = \frac{f_{yd}}{E_s} \qquad \varepsilon_{s2} = 0,00233 > 0,00218 = \varepsilon_{yd} = \frac{435}{2.10^5}$$

$$\Rightarrow \quad \sigma_{s2} = f_{yd} = 435 \text{ MPa}$$

$$\varepsilon_{s1} >< \varepsilon_{yd} = \frac{f_{yd}}{E_s} \qquad \varepsilon_{s1} = 0,049 > 0,00218 = \varepsilon_{yd} = \frac{435}{2.10^5}$$

$$\Rightarrow \quad \sigma_{s1} = f_{yd} = 435 \text{ MPa}$$

$$A = \frac{\lambda.b_w.x_u.f_{cu}\left(d - \frac{\lambda}{2}x_u\right) - M_{EdA}}{\sigma_{s2}(2d - h)}$$

$$A = \frac{0,8.1,20.0,03.16,7\left(0,45 - \frac{0,8}{2}0,03\right) - 0,160}{435(2.0,45 - 0,50)}$$

$$A = 2,91 \text{ cm}^2$$

$$N_{Ed,\ calculé} = \lambda.b_w.x_u.f_{cu} - A.\left(\sigma_{s1} + \sigma_{s2}\right)$$

$$N_{Ed,\ calculé} = 0,8.1,20.0,03.16,7 - 2,91.10^{-4}.(435 + 435)$$

$$N_{Ed,\ calculé} = 0,228 \text{ MN}$$

$$N_{Ed,\ calculé} >< N_{Ed,\ réel} \qquad N_{Ed,\ calculé} = 0,228 \text{ MN} > 0,12633 \text{ MN} = N_{u,\ réel}$$

Comme $N_{Ed,\ calculé} > N_{Ed,\ réel}$, nous allons augmenter la valeur de x_u, ce qui aura pour effet de diminuer la contrainte σ_{s2} (mais faiblement) et d'augmenter la section d'aciers A (fortement) d'où le terme soustractif de $N_{Ed,\ calculé}$ augmente.

Itérations suivantes :

Étant donné la pente du diagramme contraintes-déformations de l'acier, σ_{s2} varie très vite.

Essayons $x_u = 0,045$ m et cherchons, par itérations successives à réaliser $N_{Ed,\ calculé} \approx N_{Ed,\ réel}$.

Données :

Géométrie :	b_w	1,2 m	
	h	0,5 m	
	d	0,45 m	
Béton :	f_{ck}	25 MPa	
	f_{cu}	16,7 MPa	
	λ	0,8	
	ε_{cu2}	0,0035	
Aciers :	f_{yd}	435 MPa	
	B	0	: valeur ou 0 pour diagramme σ–ε à palier horizontal
	A	435	: valeur ou f_{yd} pour diagramme σ–ε à palier horizontal
	ε_{ud}	1000000	: valeur ou infini (1 000 000) pour diagramme σ–ε à palier horizontal
	ε_{yd}	0,002175	
Sollicitations :	M_{EdA}	0,16 mMN	
	$N_{Ed,\,réel}$	0,12633 MN	

$$x_e = \frac{E_s.\varepsilon_{cu2}}{E_s.\varepsilon_{cu2} - f_{yd}}(h-d) \qquad 0$$

Références :	$M_{RS} = \left(\frac{h}{d} - 1\right)\left[\left(\lambda + \frac{\lambda^2}{2}\right) - \frac{\lambda^2}{2} \cdot \frac{h}{d}\right] b_w . d^2 . f_{cu}$	0,344688																		
	$\sigma_{s\beta} . d$	1,575E-09																		
Calculs itératifs :	x_u	0,03	0,045	0,0375	0,03375	0,031875	0,0328125	0,03328125	0,033046875	0,033164063	0,033222656	0,033251953	0,033266602	0,033259277	0,033255615	0,033257446	0,033256531	0,033256989	0,03325676	
	Pivot	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	
Piv B	$\varepsilon_{s2} = \varepsilon_{cu2} \frac{h - d - x_u}{x_u}$	0,002333333	0,000388889	0,001166667	0,001685185	0,001990196	0,001833333	0,001758216	0,001795508	0,001776796	0,00176749	0,001762849	0,001760531	0,00176169	0,001762269	0,001761979	0,001762124	0,001762052	0,001762088	
	$\varepsilon_{s2} = \varepsilon_{cu2} \frac{x_u - (h - d)}{x_u}$	-0,00233333	-0,000388889	-0,00116667	-0,00168519	-0,0019902	-0,001833333	-0,00175822	-0,00179551	-0,0017768	-0,00176749	-0,00176285	-0,00176053	-0,00176169	-0,00176227	-0,00176198	-0,00176212	-0,00176205	-0,00176209	
Piv A	$\varepsilon_{s2} = \varepsilon_{ud} \frac{h - d - x_u}{d - x_u}$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
	$\varepsilon_{s2} = \varepsilon_{ud} \frac{x_u - (h - d)}{d - x_u}$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
Piv B	$\varepsilon_{s1} = \varepsilon_{cu2} \frac{d - x_u}{x_u}$	0,049	0,0315	0,0385	0,043166667	0,045911765	0,0445	0,043823944	0,044159574	0,043991166	0,043907407	0,043865639	0,043844782	0,043855208	0,043860423	0,043857815	0,043859119	0,043858467	0,043858793	
Piv A	$\varepsilon_{s1} = \varepsilon_{ud}$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
Retenu	ε_{s2}	0,002333333	0,000388889	0,001166667	0,001685185	0,001990196	0,001833333	0,001758216	0,001795508	0,001776796	0,00176749	0,001762849	0,001760531	0,00176169	0,001762269	0,001761979	0,001762124	0,001762052	0,001762088	
Retenu	ε_{s1}	0,049	0,0315	0,0385	0,043166667	0,045911765	0,0445	0,043823944	0,044159574	0,043991166	0,043907407	0,043865639	0,043844782	0,043855208	0,043860423	0,043857815	0,043859119	0,043858467	0,043858793	
Hooke	$\sigma_{s2} = E_s . \varepsilon_{s2}$	0	77,77777778	233,3333333	337,037037	398,0392157	366,6666667	351,6431925	359,1016548	355,3592462	353,4979424	352,5697504	352,1062674	352,3379579	352,4538414	352,3958964	352,4248681	352,4103821	352,417625	
	$\sigma_{s1} = E_s . \varepsilon_{s1}$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
Palier	$\sigma_{s2} = A + B . \varepsilon_{s2}$	435	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
	$\sigma_{s1} = A + B . \varepsilon_{s1}$	435	435	435	435	435	435	435	435	435	435	435	435	435	435	435	435	435	435	
Retenu	σ_{s2}	435	77,77777778	233,3333333	337,037037	398,0392157	366,6666667	351,6431925	359,1016548	355,3592462	353,4979424	352,5697504	352,1062674	352,3379579	352,4538414	352,3958964	352,4248681	352,4103821	352,417625	
Retenu	σ_{s1}	435	435	435	435	435	435	435	435	435	435	435	435	435	435	435	435	435	435	
$M_{EdA} \leq M_{RS}$	$A = \frac{\lambda . b_w . x_u . f_{cu} \left(d - \frac{\lambda}{2} x_u\right) - M_{EdA}}{\sigma_{s2} (2d - h)}$	2,911521839	48,74852571	10,87735714	5,650819615	3,984751533	4,760324574	5,190002785	4,971432263	5,079765256	5,134643468	5,162262674	5,176117577	5,169186342	5,165723563	5,167454716	5,16658908	5,167021883	5,166805478	
	$N_{Ed,\ calculé} = \lambda . b_w . x_u . f_{cu} - A(\sigma_{s1} + \sigma_{s2})$	0,2276576	-1,77827607	-0,12577004	0,104815797	0,179074571	0,144430647	0,125296964	0,135025241	0,130202306	0,127760044	0,12653112	0,125914698	0,126223073	0,126377137	0,126300115	0,126338629	0,126319373	0,126329001	
	$N_{Ed,\ calculé} \asymp N_{Ed,\ réel}$	>	<	<	<	>	>	<	>	>	>	>	<	<	>	<	>	<	<	
$M_{EdA} > M_{RS}$	$A = \frac{M_{EdA} - \lambda . b_w . x_u . f_{cu} \left(d - \frac{\lambda}{2} x_u\right)}{\sigma_{s2} (2d - h)}$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
	$N_{Ed,\ calculé} = \lambda . b_w . x_u . f_{cu} - A(\sigma_{s1} - \sigma_{s2})$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
	$N_{Ed,\ calculé} \asymp N_{Ed,\ réel}$	<	<	<	<	<	<	<	<	<	<	<	<	<	<	<	<	<	<	

Annexe en ligne.fm Page 644 Mercredi, 11. mars 2009 10:05 10

8.2.2 Cas du diagramme σ–ε à palier incliné

Moment de référence :

$$M_{RS} = \left(\frac{h}{d} - 1\right).\left[\left(\lambda + \frac{\lambda^2}{2}\right) - \frac{\lambda^2}{d}.\frac{h}{d}\right] b_w.d^2.f_{cu}$$

$$M_{RS} = \left(\frac{0,50}{0,45} - 1\right).\left[\left(0,8 + \frac{0,8^2}{2}\right) - \frac{0,8^2}{2}.\frac{0,50}{0,45}\right] 1,20.0,45^2.16,7$$

$$M_{RS} = 0,345 \text{ mMN}$$

Position de l'axe neutre :

$M_{EdA} >< M_{RS}$ $\qquad$ $M_{EdA} = 0,160 \text{ mMN} < 0,345 \text{ mMN} = M_{RS}$

$x_u < h - d$ et les aciers supérieurs sont tendus.

Comme h – d = 0,05 m, prenons $x_u = 0,03$ m.

Première itération :

diagramme σ–ε à palier incliné

$x_u >< \dfrac{\varepsilon_{cu2}}{\varepsilon_{cu2} + \varepsilon_{ud}} d$ $\qquad$ $x_u = 0,03 \text{ m} < 0,0324 \text{ m} = \dfrac{3,5}{3,5 + 45} 0,45$

$\Rightarrow$ Pivot A

$\varepsilon_{s2} = \varepsilon_{ud} \dfrac{h - d - x_u}{d - x_u}$ $\qquad$ $\varepsilon_{s2} = 0,045 \dfrac{0,50 - 0,45 - 0,03}{0,45 - 0,03} = 0,00214$

$\varepsilon_{s1} = \varepsilon_{ud}$ $\qquad$ $\varepsilon_{s1} = 0,045$

$\varepsilon_{s2} >< \varepsilon_{yd} = \dfrac{f_{yd}}{E_s}$ $\qquad$ $\varepsilon_{s2} = 0,00214 < 0,00218 = \varepsilon_{yd} = \dfrac{435}{2.10^5}$

$\Rightarrow \quad \sigma_{s2} = E_s.\varepsilon_{s2} = 2.10^5.0,00214 = 428 \text{ MPa}$

$\varepsilon_{s1} >< \varepsilon_{yd} = \dfrac{f_{yd}}{E_s}$ $\qquad$ $\varepsilon_{s1} = 0,045 > 0,00218 = \varepsilon_{yd} = \dfrac{435}{2.10^5}$

$\Rightarrow \quad \sigma_{s1} = A + B.\varepsilon_{s1} = 433,2 + 727,27.0,045$

$\sigma_{s1} = 466 \text{ MPa}$

$$A = \frac{\lambda.b_w.x_u.f_{cu}\left(d - \frac{\lambda}{2}x_u\right) - M_{EdA}}{\sigma_{s2}(2d - h)}$$

$$A = \frac{0,8.1,20.0,03.16,7\left(0,45 - \frac{0,8}{2}\,0,03\right) - 0,160}{428\ (2.0,45 - 0,50)} 10^4$$

Annexe en ligne.fm Page 645 Mercredi, 11. mars 2009 10:05 10

$$A = 2,96\ cm^2$$

$$N_{Ed,\ calculé} = \lambda.b_w.x_u.f_{cu} - A.(\sigma_{s1} + \sigma_{s2})$$

$$N_{Ed,\ calculé} = 0,8.1,20.0,03.16,7 - 2,96.10^{-4}.(435 + 428)$$

$$N_{Ed,\ calculé} = 0,216\ MN$$

$N_{Ed,\ calculé} >< N_{Ed,\ réel}$ $\quad N_{Ed,\ calculé} = 0,216\ MN > 0,12633\ MN = N_{Ed,\ réel}$

Comme $N_{Ed,\ calculé} > N_{Ed,\ réel}$, nous allons augmenter la valeur de x_u, ce qui aura pour effet de diminuer la contrainte σ_{s2} (mais faiblement) et d'augmenter la section d'aciers A (fortement) d'où le terme soustractif de $N_{Ed,\ calculé}$ augmente.

Itérations suivantes :

Étant donné la pente du diagramme contraintes-déformations de l'acier, σ_{s2} varie très vite.

Essayons $x_u = 0,045\ m$ et cherchons, par itérations successives à réaliser $N_{Ed,\ calculé} \approx N_{Ed,\ réel}$.

Données :

Géométrie :	b_w	1,2	m	
	h	0,5	m	
	d	0,45	m	
Béton :	f_{ck}	25	MPa	
	f_{cu}	16,7	MPa	
	λ	0,8		
	ε_{cu2}	0,0035		
Aciers :	f_{yd}	435	MPa	
	B	727,27		: valeur ou 0 pour diagramme σ–ε à palier horizontal
	A	433,2		: valeur ou f_{yd} pour diagramme σ–ε à palier horizontal
	ε_{ud}	0,045		: valeur ou infini (1 000 000) pour diagramme σ–ε à palier horizontal
	ε_{yd}	0,002175		
Sollicitations :	M_{EdA}	0,16	mMN	
	$N_{Ed,\ réel}$	0,12633	MN	

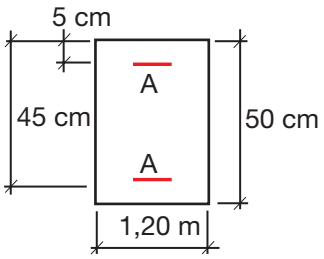
$$x_e = \frac{E_s.\varepsilon_{cu2}}{E_s.\varepsilon_{cu2} - f_{yd}}(h-d) \qquad 0$$

Références :	$M_{RS} = \left(\frac{h}{d} - 1\right)\left[\left(\lambda + \frac{\lambda^2}{2}\right) - \frac{\lambda^2}{2} \cdot \frac{h}{d}\right] b_w . d^2 . f_{cu}$	0,344688																		
	$\alpha_{AB} . d$	0,03247423																		
Calculs itératifs :	x_u	0,03	0,045	0,0375	0,03375	0,031875	0,0328125	0,03328125	0,03304688	0,03292969	0,03287109	0,03290039	0,03288574	0,03289307	0,03289673	0,03289856	0,03289764	0,03289719	0,03289742
	Pivot	A	B	B	B	A	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B
Piv B	$\varepsilon_{s2} = \varepsilon_{cu2} \frac{h - d - x_u}{x_u}$	0	0,00038889	0,00116667	0,00168519	0	0,00183333	0,00175822	0,00179551	0,00181435	0,00182383	0,00181909	0,00182146	0,00182027	0,00181968	0,00181938	0,00181953	0,0018196	0,00181957
	$\varepsilon_{s2} = \varepsilon_{cu2} \frac{x_u - (h - d)}{x_u}$	0	-0,00038889	-0,00116667	-0,00168519	0	-0,00183333	-0,00175822	-0,00179551	-0,00181435	-0,00182383	-0,00181909	-0,00182146	-0,00182027	-0,00181968	-0,00181938	-0,00181953	-0,0018196	-0,00181957
Piv A	$\varepsilon_{s2} = \varepsilon_{ud} \frac{h - d - x_u}{d - x_u}$	0,00214286	0	0	0	0,00195067	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	$\varepsilon_{s2} = \varepsilon_{ud} \frac{x_u - (h - d)}{d - x_u}$	-0,00214286	0	0	0	-0,00195067	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Piv B	$\varepsilon_{s1} = \varepsilon_{cu2} \frac{d - x_u}{x_u}$	0	0,0315	0,0385	0,04316667	0	0,0445	0,04382394	0,04415957	0,04432918	0,04441444	0,04437177	0,0443931	0,04438243	0,0443771	0,04437444	0,04437577	0,04437643	0,0443761
Piv A	$\varepsilon_{s1} = \varepsilon_{ud}$	0,045	0	0	0	0,045	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Retenu	ε_{s2}	0,00214286	0,00038889	0,00116667	0,00168519	0,00195067	0,00183333	0,00175822	0,00179551	0,00181435	0,00182383	0,00181909	0,00182146	0,00182027	0,00181968	0,00181938	0,00181953	0,0018196	0,00181957
Retenu	ε_{s1}	0,045	0,0315	0,0385	0,04316667	0,045	0,0445	0,04382394	0,04415957	0,04432918	0,04441444	0,04437177	0,0443931	0,04438243	0,0443771	0,04437444	0,04437577	0,04437643	0,0443761
Hooke	$\sigma_{s2} = E_s . \varepsilon_{s2}$	428,571429	77,7777778	233,333333	337,037037	390,134529	366,666667	351,643192	359,101655	362,8707	364,7653	363,817156	364,291017	364,054034	363,935582	363,876366	363,905973	363,920777	363,913375
	$\sigma_{s1} = E_s . \varepsilon_{s1}$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Palier	$\sigma_{s2} = A + B . \varepsilon_{s2}$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	$\sigma_{s1} = A + B . \varepsilon_{s1}$	465,92715	456,109005	461,199895	464,593822	465,92715	465,563515	465,07184	465,315934	465,439284	465,501289	465,470259	465,485767	465,478011	465,474134	465,472196	465,473165	465,47365	465,473408
Retenu	σ_{s2}	428,571429	77,7777778	233,333333	337,037037	390,134529	366,666667	351,643192	359,101655	362,8707	364,7653	363,817156	364,291017	364,054034	363,935582	363,876366	363,905973	363,920777	363,913375
Retenu	σ_{s1}	465,92715	456,109005	461,199895	464,593822	465,92715	465,563515	465,07184	465,315934	465,439284	465,501289	465,470259	465,485767	465,478011	465,474134	465,472196	465,473165	465,47365	465,473408
$M_{EdA} \leq M_{RS}$	$A = \frac{\lambda . b_w . x_u . f_{cu} \left(d - \frac{\lambda}{2} x_u\right) - M_{EdA}}{\sigma_{s2} (2d - h)}$	2,95519467	48,7485257	10,8773571	5,65081962	4,06548833	4,76032457	5,19000279	4,97143226	4,86496471	4,81241855	4,83863482	4,82551252	4,83207012	4,83535158	4,83699298	4,83617223	4,83576189	4,83596706
	$N_{Ed,\ calculé} = \lambda . b_w . x_u . f_{cu} - A . (\sigma_{s1} + \sigma_{s2})$	0,21661826	-1,88117936	-0,1542686	0,08809286	0,16298912	0,12988142	0,10968967	0,11995388	0,12495887	0,12743034	0,12619717	0,12681439	0,12650594	0,12635159	0,12627439	0,12631299	0,12633229	0,12632264
	$N_{Ed,\ calculé} \gtrless N_{Ed,\ réel}$	>	<	<	<	>	>	<	<	<	>	<	>	>	>	<	<	>	<
$M_{EdA} > M_{RS}$	$A = \frac{M_{EdA} - \lambda . b_w . x_u . f_{cu} \left(d - \frac{\lambda}{2} x_u\right)}{\sigma_{s2} (2d - h)}$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	$N_{Ed,\ calculé} = \lambda . b_w . x_u . f_{cu} - A . (\sigma_{s1} - \sigma_{s2})$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	$N_{Ed,\ calculé} \gtrless N_{Ed,\ réel}$	<	<	<	<	<	<	<	<	<	<	<	<	<	<	<	<	<	<

Annexe en ligne.fm Page 648 Mercredi, 11. mars 2009 10:05 10

8.3 Pose du problème n° 2 – Cas où $M_{EdA} > M_{RS}$

On considère la section rectangulaire symétrique définie ci-contre.



Matériaux :

- béton : f_{cu} = 16,7 MPa, ε_{cu2} = 0,0035 ;
- aciers : f_{yd} = 435 MPa, $E_s = 2.10^5$ MPa.

Sollicitations : M_{EdA} = 0,450 mMN, N_{Ed} = 0,12633 MN.

Nous nous proposons de déterminer les armatures dans les cas suivants :

- aciers avec diagramme σ–ε à palier horizontal ($\varepsilon_{ud} = \infty$) ;
- aciers avec diagramme σ–ε à palier incliné (ε_{ud} = 45 ‰, B = 727,27 et A = 433,20 pour aciers S 500 B).

8.4 Solution

8.4.1 Cas du diagramme σ–ε à palier horizontal

Moment de référence :

$$M_{RS} = \left(\frac{h}{d} - 1\right).\left[\left(\lambda + \frac{\lambda^2}{2}\right) - \frac{\lambda^2}{d}.\frac{h}{d}\right] b_w.d^2.f_{cu}$$

$$M_{RS} = \left(\frac{0,50}{0,45} - 1\right).\left[\left(0,8 + \frac{0,8^2}{2}\right) - \frac{0,8^2}{2}.\frac{0,50}{0,45}\right] 1,20.0,45^2.16,7$$

$$M_{RS} = 0,345 \text{ mMN}$$

Position de l'axe neutre :

$M_{EdA} >< M_{RS}$ $\qquad$ M_{EdA} = 0,450 mMN > 0,345 mMN = M_{RS}

$x_u > h - d$ et les aciers supérieurs sont comprimés.

Comme h – d = 0,05 m, prenons x_u = 0,06 m.

Première itération :

$$x_e = \frac{E_s.\varepsilon_{cu2}}{E_s.\varepsilon_{cu2} - f_{yd}}(h - d) \qquad x_e = \frac{2.10^5.3,5.10^{-3}}{2.10^5.3,5.10^{-3} - 435}(0,50 - 0,45) = 0,132 \text{ m}$$

$x_u >< x_e$ $\qquad$ x_u = 0,06 m < 0,132 m = x_e

$$\Rightarrow \quad \sigma_{s2} = E_s.\varepsilon_{cu2}\frac{x_u - (h - d)}{x_u}$$

Annexe en ligne.fm Page 649 Mercredi, 11. mars 2009 10:05 10

$$\sigma_{s2} = 2.10^5.0,0035\frac{0,06-(0,50-0,45)}{0,06} = 117 \text{ MPa}$$

$$\varepsilon_{s1} = \varepsilon_{cu2}\frac{d-x_u}{x_u} \qquad \varepsilon_{s1} = 0,0035\frac{0,45-0,06}{0,06} = 0,0228$$

$$\varepsilon_{s1} >< \varepsilon_{yd} = \frac{f_{yd}}{E_s} \qquad \varepsilon_{s1} = 0,0228 > 0,00218 = \varepsilon_{yd} = \frac{435}{2.10^5}$$

$$\Rightarrow \quad \sigma_{s1} = f_{yd} = 435 \text{ MPa}$$

$$A = \frac{M_{EdA} - \lambda.b_w.x_u.f_{cu}\left(d - \frac{\lambda}{2}x_u\right)}{\sigma_{s2}(2d-h)}$$

$$A = \frac{0,450 - 0,8.1,20.0,06.16,7\left(0,45 - \frac{0,8}{2}\,0,06\right)}{117\ (2.0,45 - 0,50)}10^4$$

$$A = 8,59 \text{ cm}^2$$

$$N_{Ed,\ calculé} = \lambda.b_w.x_u.f_{cu} - A.(\sigma_{s1} - \sigma_{s2})$$

$$N_{Ed,\ calculé} = 0,8.1,20.0,06.16,7 - 8,59.10^{-4}.(435-117)$$

$$N_{Ed,\ calculé} = 0,689 \text{ MN}$$

$$N_{Ed,\ calculé} >< N_{Ed,\ réel} \qquad N_{Ed,\ calculé} = 0,689 \text{ MN} > 0,12633 \text{ MN} = N_{Ed,\ réel}$$

Comme $N_{Ed,\ calculé} > N_{Ed,\ réel}$, nous allons diminuer la valeur de x_u, ce qui aura pour effet de diminuer la contrainte σ_{s2} (mais faiblement) et d'augmenter la section d'aciers A (fortement) d'où le terme soustractif de $N_{Ed,\ calculé}$ augmente.

Itérations suivantes :

Étant donné la pente du diagramme contraintes-déformations de l'acier, σ_{s2} varie très vite.

Essayons x_u = 0,055 m et cherchons, par itérations successives à réaliser $N_{Ed,\ calculé} \approx N_{Ed,\ réel}$.

Annexe en ligne.fm Page 650 Mercredi, 11. mars 2009 10:05 10

Données :

Géométrie :	b_w	1,2	m	
	h	0,5	m	
	d	0,45	m	
Béton :	f_{ck}	25	MPa	
	f_{cu}	16,7	MPa	
	λ	0,8		
	ε_{cu2}	0,0035		
Aciers :	f_{yd}	435	MPa	
	B	0		: valeur ou 0 pour diagramme σ–ε à palier horizontal
	A	435		: valeur ou f_{yd} pour diagramme σ–ε à palier horizontal
	ε_{ud}	1000000		: valeur ou infini (1 000 000) pour diagramme σ–ε à palier horizontal
	ε_{yd}	0,002175		
Sollicitations :	M_{EdA}	0,45	mMN	
	$N_{Ed,\ réel}$	0,12633	MN	

$$x_e = \frac{E_s.\varepsilon_{cu2}}{E_s.\varepsilon_{cu2} - f_{yd}}(h-d) \quad 0{,}13207547$$

Références :	$M_{RS} = \left(\frac{h}{d} - 1\right)\left[\left(\lambda + \frac{\lambda^2}{2}\right) - \frac{\lambda^2}{2} \cdot \frac{h}{d}\right] b_w . d^2 . f_{cu}$	0,344688																							
	$\alpha_{ck} . d$	1,575E-09																							
Calculs itératifs :	x_u	0,06	0,055	0,0575	0,05625	0,058125	0,0565625	0,05578125	0,05617188	0,05597656	0,05607422	0,05612305	0,05609863	0,05608643	0,05609253	0,05609558	0,05609406	0,05609329	0,05609367	0,05609348	0,05609339	0,05609344	0,05609346	0,05609345	
	Pivot	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	
Piv B	$\varepsilon_{s2} = \varepsilon_{cu2} \frac{h - d - x_u}{x_u}$	-0,00058333	-0,00031818	-0,00045652	-0,00038889	-0,00048925	-0,00040608	-0,00036275	-0,00038456	-0,00037369	-0,00037914	-0,00038185	-0,00038049	-0,00037982	-0,00038015	-0,00038032	-0,00038024	-0,0003802	-0,00038022	-0,00038021	-0,0003802	-0,00038021	-0,00038021	-0,00038021	
	$\varepsilon_{s2} = \varepsilon_{cu2} \frac{x_u - (h - d)}{x_u}$	0,00058333	0,00031818	0,00045652	0,00038889	0,00048925	0,00040608	0,00036275	0,00038456	0,00037369	0,00037914	0,00038185	0,00038049	0,00037982	0,00038015	0,00038032	0,00038024	0,0003802	0,00038022	0,00038021	0,0003802	0,00038021	0,00038021	0,00038021	
Piv A	$\varepsilon_{s2} = \varepsilon_{sd} \frac{h - d - x_u}{d - x_u}$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
	$\varepsilon_{s2} = \varepsilon_{sd} \frac{x_u - (h - d)}{d - x_u}$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
Piv B	$\varepsilon_{s1} = \varepsilon_{cu2} \frac{d - x_u}{x_u}$	0,02275	0,02513636	0,0238913	0,0245	0,02359677	0,0243453	0,02473529	0,02453894	0,02463678	0,02458777	0,02456334	0,02457555	0,02458166	0,02457861	0,02457708	0,02457784	0,02457822	0,02457803	0,02457813	0,02457818	0,02457815	0,02457814	0,02457815	
Piv A	$\varepsilon_{s1} = \varepsilon_{sd}$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
Retenu	ε_{s2}	0,00058333	0,00031818	0,00045652	0,00038889	0,00048925	0,00040608	0,00036275	0,00038456	0,00037369	0,00037914	0,00038185	0,00038049	0,00037982	0,00038015	0,00038032	0,00038024	0,0003802	0,00038022	0,00038021	0,0003802	0,00038021	0,00038021	0,00038021	
Retenu	ε_{s1}	0,02275	0,02513636	0,0238913	0,0245	0,02359677	0,0243453	0,02473529	0,02453894	0,02463678	0,02458777	0,02456334	0,02457555	0,02458166	0,02457861	0,02457708	0,02457784	0,02457822	0,02457803	0,02457813	0,02457818	0,02457815	0,02457814	0,02457815	
Hooke	$\sigma_{s2} = E_s . \varepsilon_{s2}$	116,666667	63,6363636	91,3043478	77,7777778	97,8494624	81,2154696	72,5490196	76,9123783	74,7383112	75,8272379	76,3702801	76,0988772	75,9630871	76,0309895	76,0649352	76,0479628	76,0394763	76,0437196	76,041598	76,0405371	76,0410675	76,0413327	76,0412001	
	$\sigma_{s1} = E_s . \varepsilon_{s1}$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
Palier	$\sigma_{s2} = A + B . \varepsilon_{s2}$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
	$\sigma_{s1} = A + B . \varepsilon_{s1}$	435	435	435	435	435	435	435	435	435	435	435	435	435	435	435	435	435	435	435	435	435	435	435	
Retenu	σ_{s2}	116,666667	63,6363636	91,3043478	77,7777778	97,8494624	81,2154696	72,5490196	76,9123783	74,7383112	75,8272379	76,3702801	76,0988772	75,9630871	76,0309895	76,0649352	76,0479628	76,0394763	76,0437196	76,041598	76,0405371	76,0410675	76,0413327	76,0412001	
Retenu	σ_{s1}	435	435	435	435	435	435	435	435	435	435	435	435	435	435	435	435	435	435	435	435	435	435	435	
$M_{Ed1} \leq M_{RS}$	$A = \frac{\lambda . b_w . x_u . f_{cu}\left(d - \frac{\lambda}{2} x_u\right) - M_{Ed1}}{\sigma_{s2}(2d - h)}$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
	$N_{Ed,\ calculé} = \lambda . b_w . x_u . f_{cu} - A(\sigma_{s1} + \sigma_{s2})$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
	$N_{Ed,\ calculé} \gtrless N_{Ed,\ réel}$	<	<	<	<	<	<	<	<	<	<	<	<	<	<	<	<	<	<	<	<	<	<	<	
$M_{Ed1} > M_{RS}$	$A = \frac{M_{Ed1} - \lambda . b_w . x_u . f_{cu}\left(d - \frac{\lambda}{2} x_u\right)}{\sigma_{s2}(2d - h)}$	8,61901714	28,5240686	15,4358257	20,725875	13,3697068	19,2241935	23,2689168	21,1239735	22,1627961	21,6353782	21,3777221	21,5060558	21,5705927	21,5382933	21,5221668	21,5302281	21,5342602	21,532244	21,5332521	21,5337561	21,5335041	21,5333781	21,5334411	
	$N_{Ed,\ calculé} = \lambda . b_w . x_u . f_{cu} - A(\sigma_{s1} - \sigma_{s2})$	0,68754795	-0,17752018	0,39131738	0,16142569	0,48109962	0,22668777	0,05090083	0,14412416	0,09897561	0,12189802	0,13309604	0,12751852	0,12471368	0,12611745	0,12681832	0,12646797	0,12629273	0,12638035	0,12633654	0,12631464	0,12632559	0,12633107	0,12632833	
	$N_{Ed,\ calculé} \gtrless N_{Ed,\ réel}$	>	<	>	>	>	>	<	>	<	<	>	>	<	<	>	>	<	>	>	<	<	>	<	

Annexe en ligne.fm Page 652 Mercredi, 11. mars 2009 10:05 10

8.4.2 Cas du diagramme σ–ε à palier incliné

Moment de référence :

$$M_{RS} = \left(\frac{h}{d} - 1\right).\left[\left(\lambda + \frac{\lambda^2}{2}\right) - \frac{\lambda^2}{d}.\frac{h}{d}\right] b_w.d^2.f_{cu}$$

$$M_{RS} = \left(\frac{0,50}{0,45} - 1\right).\left[\left(0,8 + \frac{0,8^2}{2}\right) - \frac{0,8^2}{2}.\frac{0,50}{0,45}\right] 1,20.0,45^2.16,7$$

$$M_{RS} = 0,345 \text{ mMN}$$

Position de l'axe neutre :

$M_{EdA} >< M_{RS}$ $\qquad$ $M_{EdA} = 0,450 \text{ mMN} > 0,345 \text{ mMN} = M_{RS}$

$x_u > h - d$ et les aciers supérieurs sont comprimés.

Comme h – d = 0,05 m, prenons $x_u = 0,06 \text{ m}$.

Première itération :

$$x_{AB} = \frac{\varepsilon_{cu2}}{\varepsilon_{cu2} + \varepsilon_{ud}} d \qquad x_{AB} = \frac{3,5}{3,5 + 45} 0,45 = 0,032 \text{ m}$$

$x_u >< x_{AB}$ $\qquad$ $x_u = 0,06 \text{ m} > 0,032 \text{ m} = x_{AB} \Rightarrow$ Pivot B

$$x_e = \frac{E_s.\varepsilon_{cu2}}{E_s.\varepsilon_{cu2} - f_{yd}}(h - d) \qquad x_e = \frac{2.10^5.3,5.10^{-3}}{2.10^5.3,5.10^{-3} - 435}(0,50 - 0,45) = 0,132 \text{ m}$$

$x_u >< x_e$ $\qquad$ $x_u = 0,06 \text{ m} < 0,132 \text{ m} = x_e$

$$\Rightarrow \quad \sigma_{s2} = E_s.\varepsilon_{cu2} \frac{x_u - (h - d)}{x_u}$$

$$\sigma_{s2} = 2.10^5.0,0035 \frac{0,06 - (0,50 - 0,45)}{0,06} = 117 \text{ MPa}$$

$$\varepsilon_{s1} = \varepsilon_{cu2} \frac{d - x_u}{x_u} \qquad \varepsilon_{s1} = 0,0035 \frac{0,45 - 0,06}{0,06} = 0,0228$$

$$\varepsilon_{s1} >< \varepsilon_{yd} = \frac{f_{yd}}{E_s} \qquad \varepsilon_{s1} = 0,0228 > 0,00218 = \varepsilon_{yd} = \frac{435}{2.10^5}$$

$$\Rightarrow \quad \sigma_{s1} = A + B.\varepsilon_{s1} = 433,2 + 727,27.0,0228$$

$$\sigma_{s1} = 450 \text{ MPa}$$

$$A = \frac{M_{EdA} - \lambda.b_w.x_u.f_{cu}\left(d - \frac{\lambda}{2}x_u\right)}{\sigma_{s2}(2d - h)}$$

Annexe en ligne.fm Page 653 Mercredi, 11. mars 2009 10:05 10

$$A = \frac{0{,}450 - 0{,}8.1{,}20.0{,}06.16{,}7\left(0{,}45 - \frac{0{,}8}{2}\,0{,}06\right)}{117(2.0{,}45 - 0{,}50)}10^4$$

$$A = 8{,}59\ \text{cm}^2$$

$$N_{Ed,\ calculé} = \lambda.b_w.x_u.f_{cu} - A.\left(\sigma_{s1} - \sigma_{s2}\right)$$

$$N_{Ed,\ calculé} = 0{,}8.1{,}20.0{,}06.16{,}7 - 8{,}59.10^{-4}.(450 - 117)$$

$$N_{Ed,\ calculé} = 0{,}475\ \text{MN}$$

$N_{Ed,\ calculé} >< N_{Ed,\ réel}$ $\quad N_{Ed,\ calculé} = 0{,}475\ \text{MN} > 0{,}12633\ \text{MN} = N_{Ed,\ réel}$

Comme $N_{Ed,\ calculé} > N_{Ed,\ réel}$, nous allons diminuer la valeur de x_u, ce qui aura pour effet de diminuer la contrainte σ_{s2} (mais faiblement) et d'augmenter la section d'aciers A (fortement) d'où le terme soustractif de $N_{Ed,\ calculé}$ augmente.

Itérations suivantes :

Étant donné la pente du diagramme contraintes-déformations de l'acier, σ_{s2} varie très vite.

Essayons $x_u = 0{,}055\ \text{m}$ et cherchons, par itérations successives à réaliser $N_{Ed,\ calculé} \approx N_{Ed,\ réel}$.

Données :

Géométrie :	b_w	1,2 m	
	h	0,5 m	
	d	0,45 m	
Béton :	f_{ck}	25 MPa	
	f_{cu}	16,7 MPa	
	λ	0,8	
	ε_{cu2}	0,0035	
Aciers :	f_{yd}	435 MPa	
	B	727,27	: valeur ou 0 pour diagramme σ–ε à palier horizontal
	A	433,2	: valeur ou f_{yd} pour diagramme σ–ε à palier horizontal
	ε_{ud}	0,045	: valeur ou infini (1 000 000) pour diagramme σ–ε à palier horizontal
	ε_{yd}	0,002175	
Sollicitations :	M_{EdA}	0,45 mMN	
	$N_{Ed,\,réel}$	0,12633 MN	

$$x_e = \frac{E_s.\varepsilon_{cu2}}{E_s.\varepsilon_{cu2} - f_{yd}}(h - d) \quad 0{,}132075472$$

Références :	$M_{RS} = \left(\frac{h}{d} - 1\right)\left[\left(\lambda + \frac{\lambda^2}{2}\right) - \frac{\lambda^2}{2}.\frac{h}{d}\right] b_w.d^2.f_{cu}$	0,344688																		
	$\alpha_{AB}.d$	0,032474227																		
Calculs itératifs :	x_u	0,06	0,055	0,0575	0,05625	0,055625	0,0559375	0,05609375	0,056171875	0,056210938	0,056230469	0,056240234	0,056245117	0,056242676	0,056241455	0,056242065	0,05624176	0,056241608	0,056241684
	Pivot	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B
Piv B	$\varepsilon_{s2} = \varepsilon_{cu2}\frac{h - d - x_u}{x_u}$	-0,000583333	-0,000318182	-0,000456522	-0,000388889	-0,000353933	-0,000371508	-0,000380223	-0,000384562	-0,000386727	-0,000387808	-0,000388349	-0,000388619	-0,000388484	-0,000388416	-0,00038845	-0,000388433	-0,000388425	-0,000388429
	$\varepsilon_{s2} = \varepsilon_{cu2}\frac{x_u - (h - d)}{x_u}$	0,000583333	0,000318182	0,000456522	0,000388889	0,000353933	0,000371508	0,000380223	0,000384562	0,000386727	0,000387808	0,000388349	0,000388619	0,000388484	0,000388416	0,00038845	0,000388433	0,000388425	0,000388429
Piv A	$\varepsilon_{s2} = \varepsilon_{ud}\frac{h - d - x_u}{d - x_u}$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	$\varepsilon_{s2} = \varepsilon_{ud}\frac{x_u - (h - d)}{d - x_u}$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Piv B	$\varepsilon_{s1} = \varepsilon_{cu2}\frac{d - x_u}{x_u}$	0,02275	0,025136364	0,023891304	0,0245	0,024814607	0,024656425	0,024577994	0,024538943	0,024519458	0,024509726	0,024504862	0,024502431	0,024503646	0,024504254	0,02450395	0,024504102	0,024504178	0,02450414
Piv A	$\varepsilon_{s1} = \varepsilon_{ud}$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Retenu	ε_{s2}	0,000583333	0,000318182	0,000456522	0,000388889	0,000353933	0,000371508	0,000380223	0,000384562	0,000386727	0,000387808	0,000388349	0,000388619	0,000388484	0,000388416	0,00038845	0,000388433	0,000388425	0,000388429
Retenu	ε_{s1}	0,02275	0,025136364	0,023891304	0,0245	0,024814607	0,024656425	0,024577994	0,024538943	0,024519458	0,024509726	0,024504862	0,024502431	0,024503646	0,024504254	0,02450395	0,024504102	0,024504178	0,02450414
Hooke	$\sigma_{s2} = E_s.\varepsilon_{s2}$	116,6666667	63,63636364	91,30434783	77,77777778	70,78651685	74,30167598	76,04456825	76,9123783	77,34537874	77,56165335	77,66973433	77,72376074	77,69674871	77,68324181	77,68999533	77,68661859	77,68493021	77,6857744
	$\sigma_{s1} = E_s.\varepsilon_{s1}$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Palier	$\sigma_{s2} = A + B.\varepsilon_{s2}$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	$\sigma_{s1} = A + B.\varepsilon_{s1}$	449,7453925	451,4809232	450,5754289	451,018115	451,246919	451,1318779	451,074838	451,0464371	451,0322662	451,0251881	451,021651	451,0198828	451,0207669	451,0212089	451,0209879	451,0210984	451,0211536	451,021126
Retenu	σ_{s2}	116,6666667	63,63636364	91,30434783	77,77777778	70,78651685	74,30167598	76,04456825	76,9123783	77,34537874	77,56165335	77,66973433	77,72376074	77,69674871	77,68324181	77,68999533	77,68661859	77,68493021	77,6857744
Retenu	σ_{s1}	449,7453925	451,4809232	450,5754289	451,018115	451,246919	451,1318779	451,074838	451,0464371	451,0322662	451,0251881	451,021651	451,0198828	451,0207669	451,0212089	451,0209879	451,0210984	451,0211536	451,021126
$M_{EdA} \leq M_{RS}$	$A = \frac{\lambda.b_w.x_u.f_{cu}\left(d - \frac{\lambda}{2}x_u\right) - M_{EdA}}{\sigma_{s2}(2d - h)}$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	$N_{Ed,\ calculé} = \lambda.b_w.x_u.f_{cu} - A(\sigma_{s1} + \sigma_{s2})$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	$N_{Ed,\ calculé} \gtrless N_{Ed,\ réel}$	<	<	<	<	<	<	<	<	<	<	<	<	<	<	<	<	<	<
$M_{EdA} > M_{RS}$	$A = \frac{M_{EdA} - \lambda.b_w.x_u.f_{cu}\left(d - \frac{\lambda}{2}x_u\right)}{\sigma_{s2}(2d - h)}$	8,619017143	28,52406857	15,43582571	20,725875	24,20697756	22,37842396	21,53184083	21,1239735	20,92372618	20,82450389	20,77511562	20,75047689	20,76279165	20,76895248	20,76587177	20,76741205	20,76818225	20,76779715
	$N_{Ed,\ calculé} = \lambda.b_w.x_u.f_{cu} - A(\sigma_{s1} - \sigma_{s2})$	0,674838875	-0,224530481	0,367275421	0,128226743	-0,029199642	0,053503398	0,091785793	0,110227706	0,119281539	0,123767592	0,126000514	0,127114463	0,126557698	0,126279158	0,126418441	0,126348803	0,126313981	0,126331392
	$N_{Ed,\ calculé} \gtrless N_{Ed,\ réel}$	>	<	>	>	<	<	<	<	<	<	<	>	>	<	>	>	<	>

A5 Vérification à l'ELU d'une section rectangulaire dont on connaît les armatures

On distingue les deux cas ci-après.

1. Section sans aciers comprimés ($A_{s2} = 0$)

1.1 Aciers avec diagramme σ–ε à palier horizontal

1/ Calculer μ_{lu} et en déduire $M_{lu} = \mu_{lu}.b_w.d^2.f_{cu}$.

2/ Si $M_{Ed} \leq M_{lu}$, le fait d'avoir $A_{s2} = 0$ est correct. Sinon, il faut prévoir des aciers comprimés et, comme la section n'en comporte pas, tout le dimensionnement (détermination de A_{s2}, puis de A_{s1}) est à reprendre.

3/ En déduire la position de l'axe neutre par l'équation d'équilibre des forces :

$$\lambda.b_w.x_u.f_{cu} - A_{s1}.f_{yd} = 0 \quad \Rightarrow \quad x_u = \frac{A_{s1}.f_{yd}}{\lambda.b_w.f_{cu}}.$$

4/ Calculer la valeur du bras de levier : $z_c = d - \frac{\lambda}{2} x_u$.

5/ En déduire le moment résistant à l'ELU : $M_{Ru} = A_{s1}.f_{yd}.z_c$.

6/ Il faut vérifier : $M_{Ru} \geq M_{Ed}$, sinon la section d'armatures tendues est insuffisante.

1.2 Aciers avec diagramme σ–ε à palier incliné

1/ Calculer μ_{lu} et en déduire $M_{lu} = \mu_{lu}.b_w.d^2.f_{cu}$.

2/ Si $M_{Ed} \leq M_{lu}$, le fait d'avoir $A_{s2} = 0$ est correct. Sinon, il faut prévoir des aciers comprimés et, comme la section n'en comporte pas, tout le dimensionnement (détermination de A_{s2}, puis de A_{s1}) est à reprendre.

Annexe en ligne.fm Page 658 Mercredi, 11. mars 2009 10:05 10

3/ En déduire par approximations successives la position de l'axe neutre par l'équation d'équilibre des forces :

a) $\lambda.b_w.x_u.f_{cu} - A_{s1}.\sigma_{s1} = 0 \quad \Rightarrow \quad x_u = \dfrac{A_{s1}.\sigma_{s1}}{\lambda.b_w.f_{cu}}$

avec $\sigma_{s1} = f_{yd}$

b) Si $x_u \leq \alpha_{AB}.d \quad \Rightarrow \quad \varepsilon_{s1} = \varepsilon_{ud} \quad \Rightarrow$

$$\sigma'_{s1} = \begin{cases} 454 \text{ MPa : S 500 A,} \\ 466 \text{ MPa : S 500 B,} \\ 493 \text{ MPa : S 500 C.} \end{cases}$$

Si $x_u > \alpha_{AB}.d \quad \Rightarrow \quad \varepsilon_{s1} = \varepsilon_{cu2}\dfrac{1 - x_u}{x_u} \quad \Rightarrow$

$$\sigma'_{s1} = \begin{cases} E_s.\varepsilon_{s1} \text{ si } \varepsilon_{s1} < \varepsilon_{yd} = \dfrac{f_{yd}}{E_s}, \\ A + B.\varepsilon_{s1} \text{ si } \varepsilon_{s1} \geq \varepsilon_{yd} = \dfrac{f_{yd}}{E_s}. \end{cases}$$

les coefficients A et B sont ceux figurant au § 2.4.2.1, chapitre 3 : « Béton armé – Généralités », p. 53.

c) comparer σ'_{s1} à la contrainte utilisée précédemment pour calculer x_u et recommencer les étapes a/ et b/ avec σ'_{s1} jusqu'à ce que la valeur de la contrainte des aciers tendus se stabilise.

4/ Calculer la valeur du bras de levier : $z_c = d - \dfrac{\lambda}{2}x_u$.

5/ En déduire le moment résistant à l'ELU : $M_{Ru} = A_{s1}.\sigma_{s1}.z_c$.

6/ Il faut vérifier : $M_{Ru} \geq M_{Ed}$, sinon la section d'armatures tendues est insuffisante.

2. Section avec aciers comprimés ($A_{s2} \neq 0$)

2.1 Aciers avec diagramme σ–ε à palier horizontal

Peu importe, dans ce cas, que M_{Ed} soit supérieur ou non à M_{lu}. Le mode opératoire est le suivant :

1/ calculer la contrainte équivalente des aciers comprimés à l'ELU :

a) si σ_c est limitée :

Annexe en ligne.fm Page 659 Mercredi, 11. mars 2009 10:05 10

$$\sigma_{s2,\ e} = 0,6.\alpha_e.\gamma.f_{ck} - \delta'\left(A.f_{ck} + B\right) \leq 435 \text{ MPa } (S\ 500)$$

les coefficients A et B sont ceux figurant au § 3.3.3, chapitre 7 : « Flexion simple », p. 175, pour les aciers avec diagramme σ–ε à palier horizontal.

b) si σ_c n'est pas limitée :

$$\alpha_1 = \frac{1}{\lambda}\left[1 - \sqrt{1 - 2.\mu_{lu}}\right] \text{ avec } \mu_{lu} = \mu_{ls}$$

$$\sigma_{s2,\ e} = \text{Min}\begin{cases} E_s.\nu_{s2,\ u} = E_s\dfrac{\alpha_1 - \delta'}{\alpha_1} \text{ où } \delta' = \dfrac{d'}{d} \\ f_{yd} \end{cases}$$

2/ si $M_{Ed} > M_{lu}$, vérifier que la section d'aciers comprimés convient :

$$A_{s2} \geq \frac{M_{Ed} - M_{lu}}{(d - d')\sigma_{s2,\ e}}.$$

3/ déterminer la position de l'axe neutre par l'équation d'équilibre des forces :

$$\lambda.b_w.x_u.f_{cu} - A_{s1}.f_{yd} + A_{s2}.\sigma_{s2,\ e} = 0 \quad \Rightarrow \quad x_u = \frac{A_{s1}.f_{yd} - A_{s2}.\sigma_{s2,\ e}}{\lambda.b_w.f_{cu}}.$$

4/ calculer la valeur du bras de levier du béton seul : $z_c = d - \frac{\lambda}{2}x_u$.

5/ en déduire le moment résistant à l'ELU (par rapport aux aciers tendus) :

$$M_{Ru} = \lambda.b_w.x_u.f_{cu}.z_c + A_{s2}.\sigma_{s2,\ e}\left[d - d'\right].$$

6/ il faut vérifier : $M_{Ru} \geq M_{Ed}$, sinon la section d'armatures (tendues et/ou comprimées) est insuffisante.

2.2 Aciers avec diagramme σ–ε à palier incliné

Peu importe, dans ce cas, que M_{Ed} soit supérieur ou non à M_{lu}. Le mode opératoire est le suivant :

1/ calculer la contrainte équivalente des aciers comprimés à l'ELU :

a) si σ_c est limitée :

$$\sigma_{s2,\ e} = 0,6.\alpha_e.\gamma.f_{ck} - \delta'\left(A.f_{ck} + B\right) \leq 435 \text{ MPa } (S\ 500)$$

les coefficients A et B sont ceux figurant au § 3.3.3, chapitre 7 : « Flexion simple », p. 175, pour les aciers avec diagramme σ–ε à palier incliné.

b/ si σ_c n'est pas limitée :

Annexe en ligne.fm Page 660 Mercredi, 11. mars 2009 10:05 10

$$\alpha_1 = \frac{1}{\lambda}\left[1 - \sqrt{1 - 2.\mu_{lu}}\right] \text{ avec } \mu_{lu} = \mu_{ls}$$

$$\nu_{s2,\,u} = \varepsilon_{cu2}\frac{\alpha_1 - \delta'}{\alpha_1} \text{ où } \delta' = \frac{d'}{d}$$

$$\sigma_{s2,\,e} = \text{Min}\begin{cases} E_s.\nu_{s2,\,u} = E_s.\varepsilon_{cu2}\dfrac{\alpha_1 - \delta'}{\alpha_1} \text{ où } \delta' = \dfrac{d'}{d} \\ A + B.\nu_{s2,\,u} \end{cases}$$

les coefficients A et B sont ceux figurant au § 2.4.2.1, chapitre 3 : « Béton armé – Généralités », p. 69.

2/ si $M_{Ed} > M_{lu}$, vérifier que la section d'aciers comprimés convient :
$A_{s2} \geq \dfrac{M_{Ed} - M_{lu}}{(d - d')\sigma_{s2,\,e}}$.

3/ déterminer par approximations successives la position de l'axe neutre par l'équation d'équilibre des forces :

a) $\lambda.b_w.x_u.f_{cu} - A_{s1}.\sigma_{s1} + A_{s2}.\sigma_{s2} = 0 \Rightarrow x_u = \dfrac{A_{s1}.\sigma_{s1} - A_{s2}.\sigma_{s2}}{\lambda.b_w.f_{cu}}$ avec $\sigma_{s1} = f_{yd}$ et $\sigma_{s2} = \sigma_{s2,\,e}$

b) Si $x_u \leq \alpha_{AB}.d \Rightarrow \varepsilon_{s1} = \varepsilon_{ud} \Rightarrow \sigma'_{s1} = \begin{cases} 454 \text{ MPa : S 500 A,} \\ 466 \text{ MPa : S 500 B,} \\ 493 \text{ MPa : S 500 C.} \end{cases}$

Si $x_u > \alpha_{AB}.d \Rightarrow \varepsilon_{s1} = \varepsilon_{cu2}\dfrac{1 - x_u}{x_u} \Rightarrow$

$$\sigma'_{s1} = \begin{cases} E_s.\varepsilon_{s1} \text{ si } \varepsilon_{s1} < \varepsilon_{yd} = \dfrac{f_{yd}}{E_s}, \\ A + B.\varepsilon_{s1} \text{ si } \varepsilon_{s1} \geq \varepsilon_{yd} = \dfrac{f_{yd}}{E_s}. \end{cases}$$

les coefficients A et B sont ceux figurant au § 2.4.2.1, chapitre 3 : « Béton armé – Généralités », p. 69,

c) comparer σ'_{s1} à la contrainte utilisée précédemment pour calculer x_u et recommencer les étapes a) et b) avec σ'_{s1} jusqu'à ce que la valeur de la contrainte des aciers tendus se stabilise.

4/ calculer la valeur du bras de levier du béton seul : $z_c = d - \dfrac{\lambda}{2}x_u$.

5/ en déduire le moment résistant à l'ELU (par rapport aux aciers tendus) :
$M_{Ru} = \lambda.b_w.x_u.f_{cu}.z_c + A_{s2}.\sigma_{s2,\,e}[d - d']$.

Annexe en ligne.fm Page 661 Mercredi, 11. mars 2009 10:05 10

6/ il faut vérifier : $M_{Ru} \geq M_{Ed}$, sinon la section d'armatures (tendues et/ou comprimées) est insuffisante.

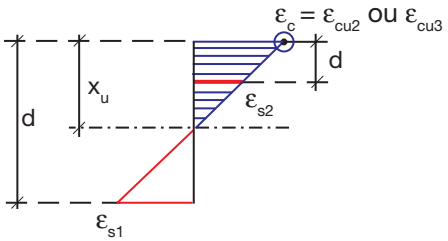
2.3 Remarque pour les aciers avec diagramme contraintes-déformations à palier horizontal

2.3.1 Remarque préliminaire

La condition pour que la contrainte des armatures comprimées soit obtenue par la droite de Hooke du diagramme contraintes-déformations des aciers est obtenue de la façon suivante :

$$\varepsilon_{s2} = \varepsilon_{cu2}\frac{x_u - d'}{x_u}$$

$$\sigma_{s2} = E_s.\varepsilon_{s2} = E_s.\varepsilon_{cu2}\frac{x_u - d'}{x_u}$$



D'où, pour que la contrainte appartienne à la droite de Hooke, il faut que :

$$\sigma_{s2} = E_s.\varepsilon_{cu2}\frac{x_u - d'}{x_u} \leq f_{yd} \quad \Rightarrow \quad x_u \leq \frac{E_s.\varepsilon_{cu2}}{E_s.\varepsilon_{cu2} - f_{yd}}d'$$

Ce qui conduit, pour les cas courants où l'on a un béton de classe au plus égale à C50/60 à :

$$E_s.\varepsilon_{cu2} = 2.10^5.3,5.10^{-3} = 700 \quad \Rightarrow \quad x_u \leq \frac{700}{700 - f_{yd}}d'$$

2.3.2 Méthode

1/ Se donner une position de départ de l'axe neutre :

$$\left.\begin{array}{l}\lambda.b_w.x_{u1}.f_{cu} + A_{s2}.\sigma_{s2} - A_{s1}.\sigma_{s1} = 0 \\ \sigma_{s1} = \sigma_{s2} = f_{yd}\end{array}\right\} \Rightarrow \quad x_{u1} = \frac{(A_{s1} - A_{s2}).f_{yd}}{\lambda.b_w.f_{cu}}$$

Si $x_{u1} \geq \dfrac{700.d'}{700 - f_{yd}}$, prendre :

$$M_{Ru} = \lambda.b_w.x_{u1}.f_{cu}\left(d - \frac{\lambda}{2}x_{u1}\right) + A_{s2}.f_{yd}(d - d').$$

Annexe en ligne.fm Page 662 Mercredi, 11. mars 2009 10:05 10

Puis faire la vérification de l'étape 4 ci-dessous.

3/ Si $x_{u1} < \dfrac{700.d'}{700 - f_{yd}}$:

a) choisir $x_{u2} < x_{u1}$ et calculer :

$\sigma_{s2,\ u2} = 700\dfrac{x_{u2} - d'}{x_{u2}}$ si $x_{u2} \geq \alpha_{AB}.d$, ce qui est toujours le cas pour les aciers avec diagramme σ–ε à palier horizontal,

$\sigma_{s2,\ u2} = 2\ .10^5.\varepsilon_{ud}\dfrac{x_{u2} - d'}{d - x_{u2}}$ si $x_{u2} < \alpha_{AB}.d$,

b) en déduire la nouvelle position de l'axe neutre :

$$x_{u3} = \frac{A_{s1}.f_{yd} - A_{s2}.\sigma_{s2,\ u2}}{\lambda.b_w.f_{cu}}$$

c) recommencer avec cette valeur le calcul de $\sigma_{s2,\ u3}$, d'où x_{u4}, etc., jusqu'à trouver $x_{ui+1} \approx x_{ui}$

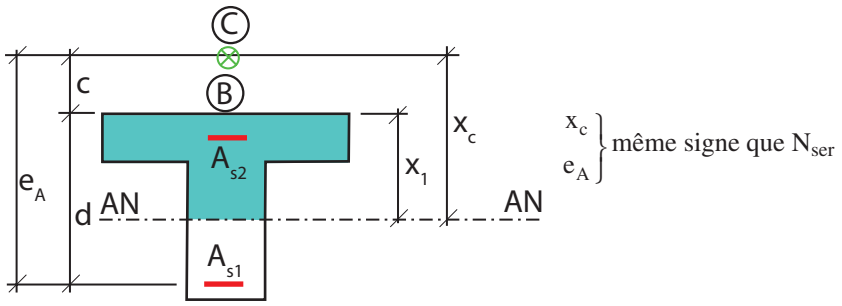
d) d'où la valeur du moment résistant à l'ELU par rapport aux aciers tendus :

$$M_{Ru} = \lambda.b_w.x_{ui}.f_{cu}\left(d - \frac{\lambda}{2}x_{ui}\right) + A_{s2}.\sigma_{s2,\ ui}[d - d'].$$

4/ il faut vérifier : $M_{Ru} \geq M_{Ed}$, sinon la section d'armatures (tendues et/ou comprimées) est insuffisante.

A6 Flexion composée – Vérification des contraintes à l'ELS pour une section quelconque

1. Notations



x_1 = distance toujours positive de la fibre la plus comprimée B de la section à l'axe neutre,

x_c = distance du centre de pression C à l'axe neutre, de même signe que N_{ser},

e_A = distance du centre de gravité des aciers tendus au centre de pression C, de même signe que N_{ser},

c = distance de la fibre la plus comprimée B de la section au centre de pression C définie par :

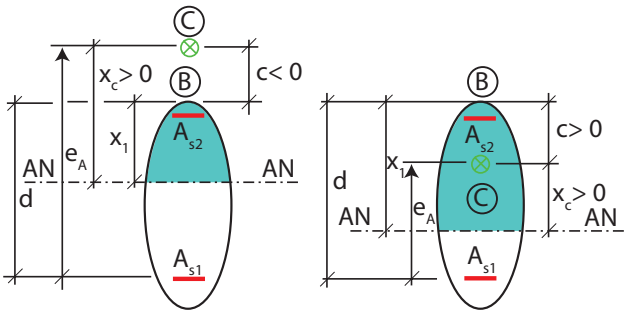
$c = d - e_A$

Annexe en ligne.fm Page 664 Mercredi, 11. mars 2009 10:05 10

Compression

⇓

$N_{ser} > 0$
$x_c > 0$
$c > 0$ si $e_A < d$
(C dans la section)
$c < 0$ si $e_A > d$
(C hors section)



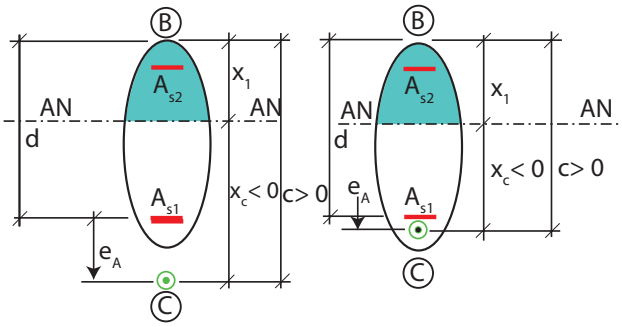
$N_{ser} > 0$
$x_c > 0$
$c < 0$

$N_{ser} > 0$
$y_c < 0$
$c > 0$

Traction

⇓

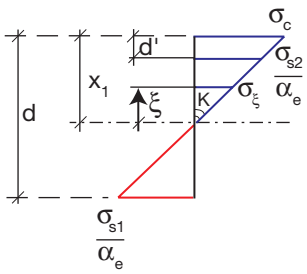
$N_{ser} < 0$
$x_c < 0$
$c > 0$



$N_{ser} < 0$
$x_c < 0$
$c > 0$

$N_{ser} < 0$
$x_c < 0$
$c > 0$

On en déduit :



$x_1 = x_c + c$,

K = coefficient angulaire du diagramme des contraintes,

$\sigma_\xi = K.\xi$,

$$\alpha_e = \frac{E_s}{E_{c,\ eff}}$$

Annexe en ligne.fm Page 665 Mercredi, 11. mars 2009 10:05 10

2. Caractéristiques géométriques des sections

S_{cf} = moment statique, par rapport à l'axe neutre, de la section homogène réduite A_{cf} :

$$S_{cf} = \int_{A_{cf}} \xi.\alpha_e.dA_{cf}$$

avec :

$$\alpha_e = \begin{cases} 1 \text{ si } dA_{cf} = \text{fibre de béton comprimé} \\ \alpha_e \text{ si } dA_{cf} = \text{fibre d'acier} \end{cases}$$

Remarque

Comme la résultante des contraintes normales n'est pas nulle, le moment statique par rapport à l'axe neutre de la section homogène réduite totale ($A_{cf} = (A_c - A_{ct}) + \alpha_e.A_{s1} + \alpha_e.A_{s2}$) n'est pas nul ($S_{cf}$ est différent de S_1 utilisé au § 1.1.3, chapitre 8 : « Effort tranchant », p. 293).

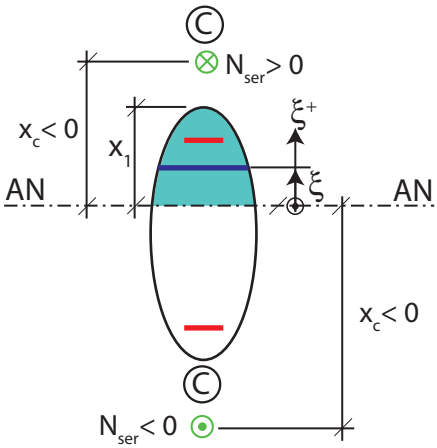
I_{cf} = moment d'inertie, par rapport à l'axe neutre, de la section homogène réduite A_{cf} :

$$I_{cf} = \int_{A_{cf}} \xi^2.\alpha_e.dA_{cf}$$

S_c = moment statique, par rapport à la parallèle à l'axe neutre passant par C, de la section homogène réduite A_{cf} :

$$S_c = -\int_{A_{cf}} (x_c - \xi)\alpha_e.dA_{cf} = -x_c \int_{A_{cf}} \alpha_e.dA_{cf} + S_{cf}$$

le signe négatif provenant du fait que l'aire est au-dessous de l'axe passant par C lorsque $x_c > 0$ (ou $N_{ser} > 0$) ou au-dessus de cet axe lorsque $x_c < 0$ (ou $N_{ser} < 0$).



Annexe en ligne.fm Page 666 Mercredi, 11. mars 2009 10:05 10

I_c = moment d'inertie, par rapport à la parallèle à l'axe neutre passant par C, de la section homogène réduite A_{cf} :

$$I_c=\int_{A_{cf}}(x_c-\xi)^2\alpha_e.dA_{cf}= x_c^2\underbrace{\int_{A_{cf}}\alpha_e.dA_{cf}}_{\frac{1}{x_c}[S_{cf}-S_c]} - 2.x_c\underbrace{\int_{A_{cf}}\xi.\alpha_e.dA_{cf}}_{S'_{cf}}+\underbrace{\int_{A_{cf}}\xi^2.\alpha_e.dA_{cf}}_{I_{cf}}$$

$$I_c = -x_c.S_{cf} - x_c.S_c + I_{cf}$$

ou encore :

$$I_c + x_c.S_c = I_{cf} - x_c.S_{cf}$$

3. Position de l'axe neutre x_c

La force élastique élémentaire a pour valeur :

$$dF = \sigma_\xi.\alpha_e.dA_{cf} = K.\xi.\alpha_e.dA_{cf}$$

En écrivant que le moment des forces élastiques élémentaires est nul en C, on obtient :

$$K\int_{A_{cf}}\xi.\alpha_e.dA_{cf}\left(x_c-\xi\right)=0$$

$$K.x_c\int_{A_{cf}}\xi.\alpha_e.dA_{cf} - K\int_{A_{cf}}\xi^2.\alpha_e.dA_{cf} = 0$$

$$K\left[x_c.S_{cf} - I_{cf}\right]=0 \quad\Rightarrow\quad x_c = \frac{I_{cf}}{S_{cf}}$$

ou encore :

$$I_c + x_c.S_c = I_{cf} - x_c.S_{cf} = 0 \quad\Rightarrow\quad x_c = -\frac{I_c}{S_c}$$

Remarque

Pour les sections rectangulaires ou en T, x_c s'obtient par résolution d'une équation du troisième degré (voir § 2.4.3.1 et 2.4.3.2, chapitre 11 : « Flexion composée », p. 443).

4. Expression du coefficient angulaire K

En écrivant que le moment des forces élastiques élémentaires par rapport à l'axe neutre vaut :

$$M_{ser/AN} = N_{ser}.x_c$$

Annexe en ligne.fm Page 667 Mercredi, 11. mars 2009 10:05 10

il vient :

$$N_{ser}.x_c = \int_{A_{cf}} \sigma_\xi.\xi.\alpha_e.dA_{cf} = K\int_{A_{cf}} \xi^2.\alpha_e.dA_{cf} = K.I_{cf}$$

d'où :

$$K = \frac{N_{ser}.x_c}{I_{cf}}$$

Remarque

$N_{ser}.x_c$ est différent de $N_{ser}.e_0 = M_{serG_0}$ $\Rightarrow$ K est différent de $\frac{M_{ser}}{I_{cf}}$ comme c'était le cas en flexion simple.

5. Calcul des contraintes

Pour une section droite quelconque donnée (béton et position des armatures), le processus de calcul s'établit comme suit :

1/ calculer les caractéristiques géométriques de la section par rapport à une parallèle à l'axe neutre passant par le centre de pression C :

$$S_c = -\int_{A_{cf}} (x_c - \xi)\alpha_e.dA_{cf} \quad \Rightarrow \quad S_c(x_c)$$

$$I_c = \int_{A_{cf}} (x_c - \xi)^2 \alpha_e.dA_{cf} \quad \Rightarrow \quad I_c(x_c)$$

2/ en déduire la profondeur de l'axe neutre :

$$x_c = -\frac{I_c(x_c)}{S_c(x_c)}$$

$\Rightarrow$ x_c par résolution de cette équation.

$\Rightarrow$ $x_1 = x_c + c$

3/ faire la vérification des contraintes :

$\sigma_c = K.x_1 \leq \overline{\sigma_c}$ pour les classes d'exposition XD, XF et XS

$$\sigma_{s1} = \alpha_e.K(d - x_1) \leq \overline{\sigma_s}$$

$$\sigma_{s2} = \alpha_e.K(x_1 - d')$$